جامعة بنها–كلية التجارة　　　　المادة: الاقتصاد القياسي　　　　دور يناير ٢٠١٣

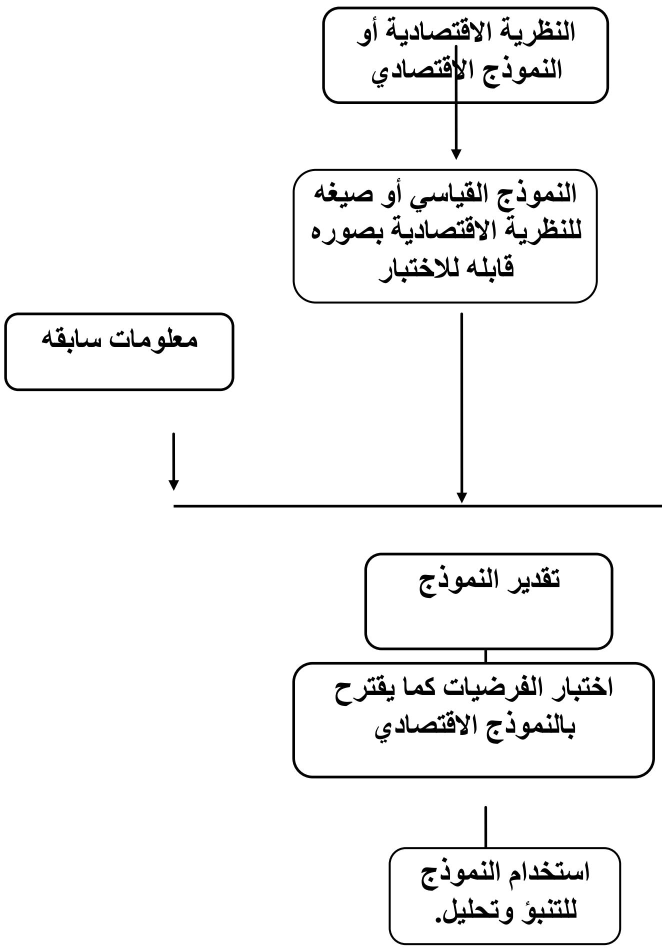
قسم الإحصاء والرياضة والتأمين　　　　الفرقة: الرابعة (إنتظام–إنتساب)　　　　الزمن : ثلاث ساعات

السؤال الاول:

١. عـــــــــرف الاقتصـــــــــاد القياســــــــي؟

هو تطبيق الطرق الرياضية و الاحصائية لتحليل البيانات الاقتصادية بهدف إعطاء محتوى رقمي للنظريات الاقتصادية للتأكد من صحة تلك النظريات ".

٢. اذكر باستخدام الرسم الخطوات التي يجب إتباعها في تحليل القياسي لنموذج اقتصادي؟



السؤال الثاني:

١. في نموذج الانحدار الخطي البسيط اثبت:

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

٢. في نموذج الانحدار الخطي المتعدد اثبت:

أ. $$\underline{\hat{\beta}} = (X^t X)^{-1} X^t \underline{Y}$$

<u>الاثبات</u>

$$\frac{\partial S(\underline{\hat{\beta}})}{\partial \underline{\hat{\beta}}} = \begin{bmatrix} \partial S\left(\underline{\hat{\beta}}\right) / \partial \hat{\beta}_0 \\ \partial S\left(\underline{\hat{\beta}}\right) / \partial \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \partial S\left(\underline{\hat{\beta}}\right) / \partial \hat{\beta}_m \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial\left(\underline{Y}^t \underline{Y} - 2\underline{\hat{\beta}}^t X^t \underline{Y} + \beta^t X^t X \beta\right)}{\partial \underline{\hat{\beta}}}$$

$$= -2X^t \underline{Y} + 2X^t X \underline{\hat{\beta}} = 0$$

وعلى ذلك نجد ان:

$$X^t X \underline{\hat{\beta}} = X^t \underline{Y}$$

ومن ثم نجد ان:

$$\underline{\hat{\beta}} = (X^t X)^{-1} X^t \underline{Y}$$

ب. $E(\underline{\hat{\beta}}) = \beta$

<u>الاثبات</u>

$$E(\underline{\hat{\beta}}) = E\left[\left(X^t X\right)^{-1} X^t \underline{Y}\right]$$

$$= \left(X^t X\right)^{-1} X^t E(\underline{Y})$$

$$= \left(X^t X\right)^{-1} X^t X \underline{\beta} = \beta$$

ت. $E\left[\frac{\underline{\hat{\varepsilon}}^t \underline{\hat{\varepsilon}}}{n-m-1}\right] = \sigma^2.$

<u>الاثبات</u>

$$\underline{\hat{\varepsilon}}^t \underline{\hat{\varepsilon}} = \underline{\varepsilon}^t (I-H)\underline{\varepsilon}$$

$$= tr\left(\underline{\varepsilon}^t (I-H)\underline{\varepsilon}\right)$$

$$= tr\left((I-H)\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}^t\right)$$

ولذلك نجد ان:

$$E\left(\underline{\hat{\varepsilon}}^t \underline{\hat{\varepsilon}}\right) = E\left[tr\left((I-H)\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}^t\right)\right]$$

$$= tr\left[(I-H)E\left(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}^t\right)\right]$$

$$= tr\left((I-H)Cov(\underline{\varepsilon})\right)$$

$$= tr\left((I-H)\sigma^2 I\right)$$

$$= \sigma^2 tr(I-H)$$

$$= (n-m-1)\sigma^2$$

ث. اذكر خصائص projection matrix

تعرف المصفوفة H التى تساوي:

$$H = X\left(X^t X\right)^{-1} X^t$$

على انها “hat” matrix (or projection matrix) وعلى ذلك نجد ان:

وتتسم المصفوفة H بالصفات التالية:

[١] $H \cdot H = H$

حيث ان:

$$H \cdot H = X\left(X^t X\right)^{-1} X^t X\left(X^t X\right)^{-1} X^t$$

$$= X\left(X^t X\right)^{-1} X^t = H$$

[٢] $(I-H)(I-H) = I-H$

حيث ان:

$$(I-H)(I-H)=I-H-H+H\cdot H$$

$$=I-H-H+H=I-H$$

[٣] $(I-H)X=0$

حيث ان:

$$\begin{aligned}(I-H)X &= X-HX\\ &= X-X\left(X^tX\right)^{-1}X^tX\\ &= X-X=0\end{aligned}$$

[٤] $tr(H)=m+1$

حيث ان:

$$tr(H)=tr\left[X\left(X^tX\right)^{-1}X^t\right]$$

$$=tr\left[\left(X^tX\right)^{-1}X^tX\right]$$

$$=tr\left(I_{(m+1)\times(m+1)}\right)=m+1$$

[٥] $tr(I-H)=n-m-1$

حيث ان:

$$\begin{aligned}tr(I-H) &= tr(I)-tr(H)\\ &= n-m-1\end{aligned}$$

تذكر ان:

$$tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$$

السؤال الثالث:

قامت شركة النور لصناعات الادوية بتصنيع كبسولات جديدة تحتوى علي بروتينات

هامة لزيادة وزن الاطفال الرضع وتم جمع البيانات من مستشفى المستقبل وتم اختبار الدواء علي عشرة رضع وكانت البيانات كالاتي:

كمية البروتين	10	11	14	15	20	25	46	50	59	70
الزيادة في الوزن	10	10	12	12	13	13	19	15	16	20

المطلوب:

١. تقدير معادلة الخط المستقيم بين كمية البروتين وزيادة الوزن لدى الاطفال.

بفرض أن X **هي كمية البروتين** Y **هي مقدار الزيادة في الوزن يمكن تطبيق المعادلتين التاليتين:**

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{n\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2},$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$$

ومن ثم يتم حساب المجاميع التالية:

كمية البروتين X	الزيادة في الوزن Y	$X\ Y$	X^2
10	10	100	100
11	10	110	121
14	12	168	196
15	12	180	225
20	13	260	400
25	13	325	625
46	19	874	2116
50	15	750	2500
59	16	944	3481

المجاميع المطلوبة
$\sum X = 320$ $\sum Y = 140$ $\sum XY = 5111$ $\sum X^2 = 14664$ إذا الوسط الحسابي:

70	20	1400	4900
320	140	5111	14664

$$\overline{X}=\frac{\sum X}{n}=\frac{320}{10}=32$$
$$\overline{Y}=\frac{\sum Y}{n}=\frac{140}{10}=14$$

بتطبيق المعادلة الأولى في المعادلة السابقة يمكن حساب $\hat{\beta}_1$ كما يلي:

$$\hat{\beta}_1=\frac{n\sum XY-\sum X\ \sum Y}{n\sum X^2-(\sum X)^2},$$

$$=\frac{(10)(5111)-(320)(140)}{(10)(14664)-(320)^2},$$

$$=\frac{6310}{44240}=0.1426.$$

بتطبيق المعادلة الثانية في المعادلة الموجودة اعلاه يمكن حساب $\hat{\beta}_0$ كما يلي:

$$\hat{\beta}_0=\overline{Y}-\hat{\beta}_1\overline{X}$$
$$\therefore\ \hat{\beta}_0=14-(0.1426)(32)=9.4368$$

إذا معادلة الانحدار المقدرة، هي:

$$\hat{Y}=9.44+0.143X$$

<u>تفسير المعادلة:</u>

الثابت $\hat{\beta}_0=9.44$: يدل على أنه في حالة عدم استخدام البروتين في التغذية، فإن الوزن يزيد 9.44 كجم.

معامل الانحدار $\hat{\beta}_1=0.143$: يدل على أنه كلما زادت كمية البروتين جرام واحد، حدث زيادة في وزن الطفل بمقدار 0.143 كجم، أى زيادة مقدارها

143 جرام.

٢.ايجاد معامل التحديد المعدًل وفسر النتيجة.

اولاً: معامل التحديد هو:

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{Error}}{SS_{Total}} = 1 - \frac{18.0029}{108}$$

حيث ان:

$$SS_{Error} = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = 18.0029$$

$$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = 108$$

$$= SS_{\mathrm{Re}gression} + SS_{Error}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$

$$= 90.47 + 18.0029$$

والجدول التالي يوضح كيف يمكن حساب ذلك:

SS Regression	SS Error	SS Total	$\hat{Y}$	Y
9.7969	0.7569	16	10.87	10
8.922169	1.02617	16	11.013	10
6.543364	0.31136	4	11.442	12
5.832225	0.17223	4	11.585	12
2.89	0.49	1	12.3	13
0.970225	0.00022	1	13.015	13
4.072324	8.89232	25	16.018	19
6.7081	2.5281	1	16.59	15
15.03113	3.52313	4	17.877	16

29.7025	0.3025	36	19.45	20
90.46894	18.0029	108	140.16	140

٣.ايجاد فترات الثقة لمعالم نموذج الانحدار عند مستوى معنوية قدره ٠,٠٥.

اذا علمت ان: $t_{0.05,9} = 11.10$ ، $t_{0.025,9} = 13.25$ $t_{0.025,8} = 2.12$

<u>اولا نقوم بحساب متوسط مجموع مربعات الاخطاء وهي كالاتي:</u>

$$MSE = \sigma^2 = \frac{SS_{Error}}{N-P-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}{N-P-1} = \frac{18.0029}{8} = 2.250367$$

ثانياً: نقوم بحساب تباين المعلمة الاولى وهي كالاتي:

$$Var\left(\beta_0\right) = \sigma^2\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\ 2}}{N\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right] = 2.250367\left[\frac{14664}{10 \times 4424}\right] = 0.745917$$

وايضاً:

$$Var(\beta_1) = \left[\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right] = \left[\frac{2.250367}{4424}\right] = 0.000509$$

وعلى ذلك نجد فترات الثقة هي كالاتي:

$$\hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2,n-2}\sqrt{Var(\beta_0)}$$

$$\hat{\beta}_0 \pm t_{0.025,8}\sqrt{\sigma^2\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\;2}}{N\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right]}$$

$$9.43_0 \pm 2.12\sqrt{0.745917}$$
$$(7.60903, 11.27097)$$

ايضاً:

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2,n-2}\sqrt{Var(\beta_1)}$$

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{0.025,8}\sqrt{\left[\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right]}$$

$$0.14 \pm 2.12\sqrt{0.000509}$$
$$(0.187814, 0.092186)$$